جامعة البعث　　　معادلات تفاضلية /2/　　　اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الأول 2017-2018

السؤال الأول : (15 درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة $(e^x-1)y''+2e^xy'+e^xy=0$

بعد أن تثبت أنها تامة .

$\frac{c_1 x}{e^x-1}+\frac{c_2}{e^x-1}$

السؤال الثاني : (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة

$$(\cos 2x-2\sin 2x)y''+5\cos 2x\ \ y'+(4\cos 2x+2\sin 2x)y=e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)^2$$

المطلوب : 1"- أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

2"- أوجد الحل العام للمعادلة

السؤال الثالث : (12درجة)

اعتمادا" على خواص المؤثر المؤثر التفاضلي أوجد وبطريقتين مختلفتين

ناتج مايلي $(D^2+2D+1)\ x^2e^{-x}$

السؤال الرابع : (38درجة)

لتكن لدينا المعادلة $y^{(4)}-y'''-9y''-11y'-4y=e^{4x}+e^{-x}$

المطلوب : 1"- أوجد y_h اذا علمت أنّ $y_1=e^{4x}$ حل خاص للمتجانسة المناظرة .

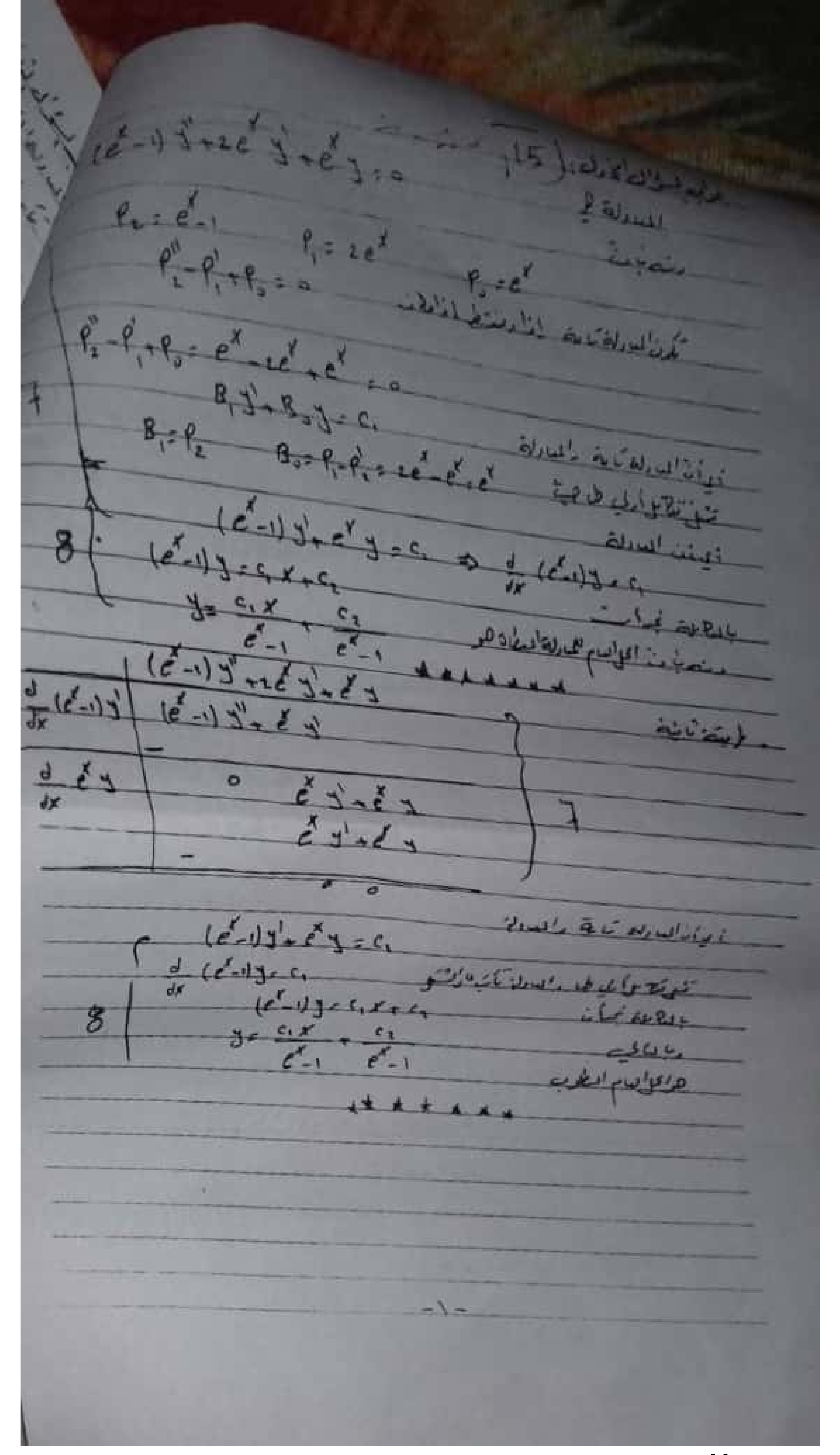
2"- اقترح حلا" خاصا" بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعينها .

3"- أوجد حلا" خاصا" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي . مل هو الحل العام .

****

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

(A_1+A_2)



حل السؤال الأول [15]

$(e^x-1)y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$

المعادلة في

$P_2 = e^x - 1$

متجانسة

$P_1 = 2e^x$

$P_2'' - P_1' + P_0 = 0$ $P_0 = e^x$

نتحقق من أن المعادلة تامة إذا تحقق الشرط

7

$P_2'' - P_1' + P_0 = e^x - 2e^x + e^x = 0$

$B_1 y' + B_0 y = c_1$

$B_1 = P_2$ $B_0 = P_1 - P_2' = 2e^x - e^x = e^x$

في أن المعادلة تامة بالصورة

نحل التكامل الأول للمعادلة

8

$(e^x-1)y' + e^x y = c_1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x-1)y = c_1$

$(e^x-1)y = c_1 x + c_2$

بالمكاملة نحصل

$y = \frac{c_1 x}{e^x-1} + \frac{c_2}{e^x-1}$

متجانسة الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

* * * * * * * *

طريقة ثانية

$(e^x-1)y'' + 2e^x y' + e^x y$

$\frac{d}{dx}(e^x-1)y'$ $(e^x-1)y'' + e^x y'$

$-$

$\frac{d}{dx} e^x y$ $0 \quad e^x y' + e^x y$

$e^x y' + e^x y$

$-$

$0 \quad 0$

7

في أن المعادلة تامة بالصورة

$(e^x-1)y' + e^x y = c_1$

نحل التكامل الأول للمعادلة

8

$\frac{d}{dx}(e^x-1)y = c_1$

$(e^x-1)y = c_1 x + c_2$

بالمكاملة نحصل

$y = \frac{c_1 x}{e^x-1} + \frac{c_2}{e^x-1}$

ويكون

هو الحل العام المطلوب

* * * * * * *

Scanned by CamScanner

السؤال الثاني (15 درجة)

[illegible]
$(\cos 2x - 2\sin 2x)y'' + 5\cos 2x\, y' + (4\cos 2x + 2\sin 2x)y = 0$
[illegible] $y = e^{-x}$ [illegible]

8
$(\cos 2x - 2\sin 2x)m^2 + 5\cos 2x\, m + (4\cos 2x + 2\sin 2x) = 0$

$\cos 2x\,(m^2 + 5m + 4) - 2\sin 2x\,(m^2 - 1) = 0$

$\cos 2x\,(m+1)(m+4) - 2\sin 2x\,(m+1)(m-1) = 0$

$(m+1)\left[(m+4)\cos 2x - 2\sin 2x\,(m-1)\right] = 0$

$m = -1$ [illegible] $\quad m = -\dfrac{4\cos 2x - 2\sin 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}$ [illegible]

[illegible] $y = e^{-x}$ [illegible]

2+2
$$y_h = y_1\left[\int \frac{c_1 e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right] = e^{-x}\left[\int \frac{c_1 e^{-\int \frac{5\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx}}{e^{-2x}}dx + c_2\right]$$

4
$$e^{-\int \frac{5\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx} \quad -\int \frac{\cos 2x - 2\sin 2x + 2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx$$

$$= e^{-\int dx - \int \frac{2\sin 2x + 4\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x}dx} = e^{-x + \ln(\cos 2x - 2\sin 2x)}$$

$$= (\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}$$

أي أن

2
$$y_h = e^{-x}\left[\int \frac{c_1(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}}{e^{-2x}}dx + c_2\right] = e^{-x}\left[c_1\int(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{x}dx + c_2\right]$$

$$= e^{-x}\left[c_1\int \cos 2x\, e^{x}dx - 2c_1\int \sin 2x\, e^{x}dx + c_2\right]$$

نفرض أن: $e^{x} = dv \Rightarrow e^{x}dx = dv$

$\cos 2x = u \Rightarrow -2\sin 2x\,dx = du$

2
$$y_h = e^{-x}\left[c_1\left(e^{x}\cos 2x + 2\int \sin 2x\, e^{x}dx - 2c_1\int \sin 2x\, e^{x}dx + c_2\right]\right.$$

[illegible]

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2 e^{-x}$$

[illegible]

[illegible] $y_1 = e^{-x} \quad y_2 = \cos 2x$

1
$$W(e^{-x}, \cos 2x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & \cos 2x \\ -e^{-x} & -2\sin 2x \end{vmatrix} = e^{-x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

1
$$W_1 = -e^{-x}\cos 2x\,(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$e^{-x}(\cos x - 2\sin x)$

ومنه الحل الخاص يعطى بالعلاقة

$y_p = y_1\int \frac{W_1}{W}dx + y_2\int \frac{W_2}{W}dx$

$y_p = e^{-x}\int -\cos x\,dx + \cos x\int e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$

ومنه يكون الحل العام هو

1+5 $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2\cos x - \frac{e^{-x}}{2}\sin x - e^{-x}\cos x$

جواب السؤال الثالث: [12 = 6+6 نقاط]

أولاً: برهان قاعدة الإزاحة الأسية (6)

2 $\phi(D)e^{mx}v(x) = e^{mx}\phi(D+m)v(x)$

4 $(D^2+2D+1)e^{-x}x^2 = (D+1)^2e^{-x}x^2 = e^{-x}(D-1+1)^2x^2 = e^{-x}D^2x^2 = 2e^{-x}$

ثانياً: + باستخدام قاعدة تأثير مؤثر تفاضلي على حاصل ضرب الدالة x (6)

1 $\phi(D)x\,v(x) = x\,\phi(D)v(x) + \phi'(D)v(x)$

1 $\phi(D)x^2v(x) = x^2\phi(D)v(x) + 2x\,\phi'(D)v(x) + \phi''(D)v(x)$

ومنه نجد:

4 $(D+1)^2x^2e^{-x} = x^2(D+1)^2e^{-x} + 2x\cdot 2(D+1)e^{-x} + 2e^{-x}$

$= x^2(-1+1)^2e^{-x} + 4x(-1+1)e^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}$

وهو المطلوب.

جواب السؤال الرابع: [38 = 14+10+14]

أولاً: المعادلة التي نتعامل معها هي (14)

$y^{(4)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

المعادلة المميزة هي

$m^4 - m^3 - 9m^2 - 11m - 4 = 0$

حل من الشكل $y = e^{mx}$ نلاحظ أن أحد جذور المعادلة المميزة هو $m_1 = 4$

ومنه يكون

$(m-4)(m^3+3m^2+3m+1) = 0$

ومنه نجد

$(m-4)(m+1)^3 = 0$

إذاً

$m_2 = m_3 = m_4 = -1$, $m_1 = 4$

ومنه الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$y_h = A_1e^{4x} + e^{-x}(A_2x^2 + A_3x + A_4)$

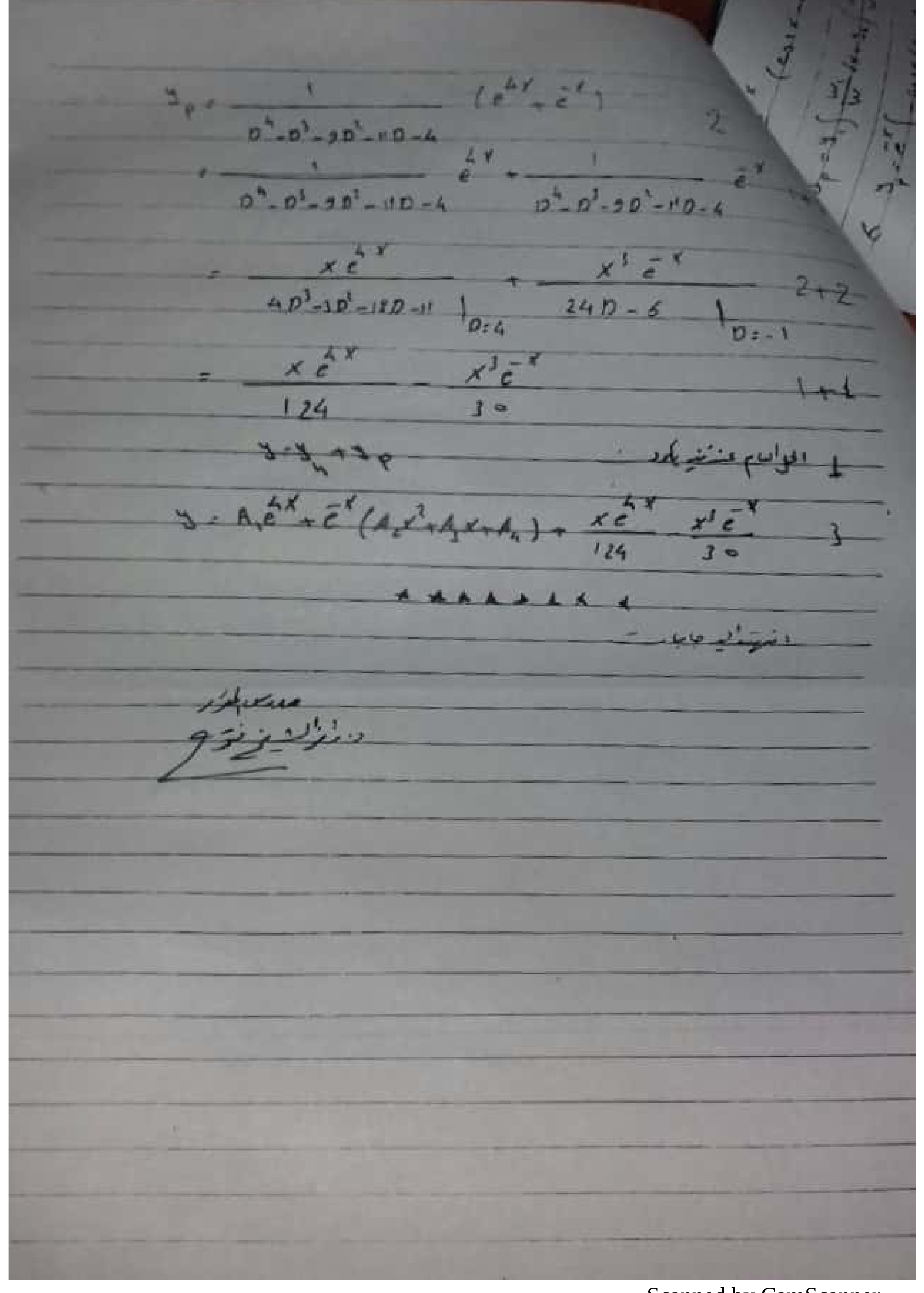
ثانياً: (10) الحل الخاص المقترح وفق طريقة الأمثال غير المعينة هو

$y_p = B_1e^{4x} + B_2e^{-x}$

نلاحظ أن هناك اشتراك بين y_p و y_h والاشتراك في الحدين e^{4x} , e^{-x}

نضرب بـ x مرة واحدة لـ e^{4x} وثلاث مرات لـ e^{-x} فيكون الحل الخاص المقترح بعد التعديل هو

$y_p = B_1xe^{4x} + B_2x^3e^{-x}$



$$y_p = \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4}\left(e^{4x} + e^{-x}\right) \quad 2$$

$$= \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{4x} + \frac{1}{D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4} e^{-x}$$

$$= \frac{x e^{4x}}{4D^3 - 3D^2 - 18D - 11}\Big|_{D=4} + \frac{x^3 e^{-x}}{24D - 6}\Big|_{D=-1} \quad 2+2$$

$$= \frac{x e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \quad 1+1$$

$y = y_h + y_p$ [illegible] 1

$$y = A_1 e^{4x} + e^{-x}\left(A_2 x^2 + A_3 x + A_4\right) + \frac{x e^{4x}}{124} - \frac{x^3 e^{-x}}{30} \quad 3$$

* * * * * * * * *

[illegible]

[illegible]

[illegible]